

# HIPERSUPERFÍCIES DO TIPO GEOMÉTRICO FINITO

*Ryuichi Fukuoka*

Orientador: *Francesco Mercuri*

Co-orientador: *Caio J. C. Negreiros*


IMECC – UNICAMP

1994

## Hipersuperfícies do tipo geométrico finito

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Ryuichi Fukuoka e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 15 de dezembro de 1994

x 

Prof. Dr. Francesco Mercuri

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

Aos meus pais

Tese de mestrado financiado pela FAPESP

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

- Aos meus pais, por terem me dado todas as condições para buscar a felicidade.

- Aos meus irmãos, pela amizade e apoio, sem os quais seria tudo mais difícil.

- Ao Franco, pela amizade, os ensinamentos e por me dar todas as condições de desenvolver este trabalho

- Ao Caio, por fazer eu descobrir minha vocação e cuidar da minha infância na matemática.

- Ao Francis, meu segundo irmão, sempre presente nas horas difíceis.

- Ao Hajime, meu terceiro irmão, pela amizade e pelo seu exemplo na luta pelos ideais.

- Ao Cláudio e Alexandre, pelas conversas produtivas que tivemos a respeito deste trabalho.

- A Ângela e Irene, por me ceder um lugar no "Clube da Luluzinha" para estudar.

- Ao Prof. João Lucas Marques Barbosa, pela revisão e conselhos dados sobre este trabalho.

- A Ludwig van Beethoven, Mikhail Tal e Gilles Villeneuve, pelo exemplo de vida.

- Ao pessoal do "Nisshin", pelos momentos inesquecíveis.

- Ao pessoal do "predinho" e da nossa turma, pela amizade e pela convivência.

- Ao povo paulista que através da FAPESP financiou este trabalho.

# ÍNDICE

Introdução	1
1 Fatos básicos	3
1.1 Hipersuperfícies em $\mathbb{R}^n$	3
1.2 A representação de Weierstrass para superfícies mínimas	4
1.3 O índice de um campo numa singularidade isolada	5
1.4 A característica de Euler-Poincaré de uma variedade	7
2 Hipersuperfícies do tipo geométrico finito. O teorema de Jorge-Meeks.	9
3 Gradiente das funções altura	18
4 A imagem da aplicação normal de Gauss das superfícies do tipo geométrico finito.	22
5 Uma caracterização dos catenóides de dimensão par	28
A Apêndice	31
A.1 Dualidade	31
A.2 Equivalências de homotopia	32
A.3 Homomorfismo de Hurewicz	33
A.4 Conjectura de Poincaré	34
Bibliografia	37

# INTRODUÇÃO

A aplicação normal de Gauss é quase sobrejetiva em superfícies mínimas completas. Os resultados existentes nesse sentido são os seguintes:

A aplicação normal de Gauss de uma superfície mínima completa não trivial, omite no máximo quatro pontos, sendo que esse máximo é atingido pela superfície de Scherk. Esse resultado provado em 1988 é devido a Fujimoto.

No caso onde a curvatura total é finita, Osserman provou há aproximadamente vinte e cinco anos que a aplicação normal de Gauss omite no máximo 3 pontos no caso não trivial. Um problema ainda em aberto é saber se esse resultado pode ser melhorado para 2 pontos ou se existe uma superfície cuja aplicação normal de Gauss omite exatamente 3 pontos.

Neste trabalho, generalizaremos o resultado de Osserman para uma classe mais ampla de superfícies, as chamadas imersões do tipo geométrico finito (vide definição no capítulo 2). Além disso, com a introdução do conceito de fins não degenerados (vide definição no capítulo 4), podemos provar que neste caso, a aplicação normal de Gauss omite no máximo 2 pontos. Observou-se durante o trabalho que não foi necessário o uso da representação de Weierstrass para superfícies mínimas. Isso mostra que quando restringimos o estudo para o caso de superfícies de curvatura total finita, o problema é essencialmente topológico pois os procedimentos utilizados para a obtenção desses resultados foram:

- a) Definir um campo na superfície e calcular a característica de Euler-Poincaré somando-se os índices das singularidades do campo.
- b) Utilizar o fato de que a aplicação normal de Gauss da superfície é um revestimento fora das fibras críticas.

As idéias desenvolvidas para provar este resultado levaram naturalmente a outras generalizações. No capítulo 5, generalizaremos um resultado de L. Rodrigues que caracteriza o catenóide como a única superfície mínima de curvatura total finita, mergulhada e com curvatura estritamente negativa. De fato, provaremos que toda hipersuperfície de tipo geométrico finito de dimensão par, mergulhada (se  $n = 2$ ), cuja curvatura de Gauss-Kronecker se anula somente em um subconjunto de dimensão baixa é topologicamente uma esfera menos dois pontos. Segue então, por um resultado de R. Schoen, que se a hipersuperfície for mínima, ela tem que ser um catenóide.

Conclui esta dissertação um Apêndice na qual demonstraremos que para  $n \neq 3$ , toda variedade  $n$ -dimensional compacta e  $n/2$ -conexa é homeomorfa a esfera  $S^n$ . Este resultado, que é usado no capítulo 5, é bem conhecido pelos especialistas, embora não se ache com facilidade na literatura na forma que está aqui apresentada.

Os resultados originais contidos neste trabalho foram obtidos em colaboração com o Prof. Dr. J. L. M. Barbosa (UFC) e com o Prof. Dr. F. Mercuri (UNICAMP).



# CAPÍTULO 1

## FATOS BÁSICOS

Esse capítulo tem como objetivo, definir notações e enunciar alguns resultados da teoria básica que serão utilizados no decorrer do trabalho.

### 1.1 Hipersuperfícies em $\mathbb{R}^n$

No que se segue,  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  será uma hipersuperfície orientável, (por abuso de linguagem, chamaremos  $M$  de hipersuperfície também).

A aplicação normal de Gauss associada a  $f$  será denotada por  $g$ .

**1.1 Definição:** Chamaremos de segunda forma fundamental de uma hipersuperfície  $M$  em  $x \in M$ , a aplicação  $S_\eta : T_x M \rightarrow T_x M$  onde  $S_\eta(v) \triangleq -\bar{\nabla}_v N = -dg(v)$ ,  $\eta$  um vetor normal unitário escolhido em  $N_x M$ ,  $\bar{\nabla}$  a conexão canônica em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $N$  uma extensão de norma constante de  $\eta$  no fibrado normal em uma vizinhança de  $p$ .

**1.2 Observação:** É fácil ver que  $-\bar{\nabla}_v N$  é de fato um vetor tangente a  $M$  em  $x$  e não depende da extensão  $N$  de  $\eta$ .

**1.3 Definição:**  $G : M \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $G(x) = \det(S_\eta(x))$  é chamada de curvatura de Gauss-Kronecker de  $M$ .

**1.4 Definição:**  $K_T = \int_M G(x).dM$ , onde  $dM$  é o elemento de volume de  $M$ , é chamada de curvatura total da hipersuperfície. Note que  $K_T$  não precisa

*ser finito.*

**1.5 Observação:** *O sinal da curvatura de Gauss-Kronecker e da curvatura total dependem da escolha do vetor  $\eta$  no caso de  $n$  ímpar. Neste caso será feita a escolha de um campo unitário contínuo em  $NM$  para se computar  $G(x)$  e obter a curvatura total. Quando  $n$  é par, o sinal de  $G(x)$  (e portanto da curvatura total) independe do vetor  $\eta$  escolhido.*

**1.6 Definição:**  $H : M \rightarrow \mathbb{R}; H(x) = \text{traço}(S_\eta(x))$  é chamada de curvatura média de  $M$ .

**1.7 Definição:**  $M$  será chamada de hipersuperfície mínima quando a sua curvatura média for identicamente nula.

## 1.2 A representação de Weierstrass para superfícies mínimas.

A teoria clássica de superfícies mínimas vem fazendo o uso contínuo de um teorema muito importante que tem possibilitado a obtenção de vários resultados. Esse teorema é chamada a representação de Weierstrass que vamos enunciar em seguida:

**1.8 Teorema:** *Seja  $D \subset \mathbb{C}$  o disco unitário ou o plano complexo,  $h$  uma função meromorfa arbitrária em  $D$  e  $f$  uma função analítica em  $D$  tendo a propriedade que para cada ponto onde  $h$  tem um polo de ordem  $m$ ,  $f$  tem um zero de ordem pelo menos  $2m$ . Então toda superfície mínima simplesmente*

conexa em  $\mathbb{R}^3$  pode ser representada por  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

$$x_1(\zeta) = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\zeta \frac{1}{2} \cdot f(z) \cdot (1 - h^2(z)) \cdot dz \right\} + c_1$$

$$x_2(\zeta) = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\zeta \frac{i}{2} \cdot f(z) \cdot (1 + h^2(z)) \cdot dz \right\} + c_2$$

$$x_3(\zeta) = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\zeta f(z) \cdot h(z) \cdot dz \right\} + c_3$$

onde  $c_1, c_2$  e  $c_3$  são constantes reais, e  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

Utilizando-se este teorema podemos provar o seguinte resultado:

**1.9 Teorema:** *Seja  $\varphi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão mínima completa de curvatura total finita. Então existe uma superfície de Riemann compacta  $\bar{M}$ , um número finito de pontos  $\{p_1, \dots, p_k\} \subset \bar{M}$  tais que  $M$  é conformemente equivalente a  $\bar{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$ . Além disso, a aplicação normal de Gauss  $g$  associada a  $\varphi$  se estende a uma aplicação  $\bar{g} : \bar{M} \rightarrow S^2$  meromorfa.*

Para maiores detalhes, vide [2] e [3].

### 1.3 O índice de um campo numa singularidade isolada.

Sejam  $\Psi$  um campo de vetores diferenciável numa variedade orientada  $M^n$  e  $x \in M$  uma singularidade isolada de  $\Psi$ . Tome uma carta local  $\varphi$  que manda  $x$  na origem de  $\mathbb{R}^n$  e preserva a orientação. Essa aplicação induz um campo  $d\varphi(\Psi)$  numa vizinhança da origem de  $\mathbb{R}^n$ . Tome uma esfera suficientemente pequena  $S_\delta^{n-1}$  em torno de  $0 \in \mathbb{R}^n$  tal que o campo não

se anule na esfera. Podemos normalizar o campo em  $S_\delta^{n-1}$ , e esse campo normalizado induz uma aplicação  $\phi : S_\delta^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ . Tome um valor regular  $y$  de  $\phi$ . O índice do campo  $\Psi$  em  $x$  é definido como o número:

$$i(x, \Psi) = \#\{z \in \phi^{-1}(y); d\phi_z \text{ preserva a orientação}\} - \\ - \#\{z \in \phi^{-1}(y); d\phi_z \text{ inverte a orientação}\}$$

Alguns fatos importantes:

**1.10 Observação:** O índice não depende de  $\varphi$  e portanto é bem definido em  $M$ . Mais em geral, se  $f : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo que preserva a orientação,  $\Psi$  um campo em  $M$  com uma singularidade isolada  $p$ , então  $df(\Psi)$  é um campo em  $N$  com uma singularidade isolada em  $f(p)$  do mesmo índice.

**1.11 Observação:** Se dois campos  $\Psi'$  e  $\Psi''$  tem em  $p \in M$  uma singularidade isolada e são homotópicos no sentido que existe uma família contínua  $\Psi_t$  de campos com singularidade isolada em  $p$  com  $\Psi_0 = \Psi'$  e  $\Psi_1 = \Psi''$ , então  $\Psi'$  e  $\Psi''$  tem o mesmo índice em  $p$ .

**1.12 Observação:** Seja  $\bar{\phi} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  uma imersão de grau 1, i.e. homotópica a inclusão canônica  $i : S^{n-1} \hookrightarrow S_\delta \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Então o índice de  $\Psi$  pode ser calculado como o grau de  $\Psi \circ \bar{\phi}$ , i.e.

$$i(x, \Psi) = \#\{z \in (\Psi \circ \bar{\phi})^{-1}(y); d(\Psi \circ \bar{\phi})_z \text{ preserva a orientação}\} - \\ - \#\{z \in (\Psi \circ \bar{\phi})^{-1}(y); d(\Psi \circ \bar{\phi})_z \text{ inverte a orientação}\}$$

A título de exemplo vamos demonstrar um resultado que utilizaremos mais adiante:

**1.13 Lema:** *Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com um ponto crítico não degenerado em  $\bar{x} \in U$ . Então o índice do campo  $\nabla f$  em  $\bar{x}$  é o sinal do determinante da matriz Hessiana.*

*Demonstração:*

O fato que  $\bar{x}$  é não degenerado implica pelo teorema das funções inversas que  $\nabla f$  é um difeomorfismo de uma vizinhança de  $\bar{x}$  em uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Portanto o índice de  $\nabla f$  em  $\bar{x}$  é  $\pm 1$  dependendo se  $\nabla f$  preserva ou inverte a orientação e isso é determinado pelo sinal da derivada de  $\nabla f$ , i.e. pelo sinal do determinante da matriz Hessiana de  $f$  em  $\bar{x}$ .

## 1.4 A característica de Euler-Poincaré de uma variedade

Seja  $M$  uma variedade homotopicamente equivalente a uma variedade compacta. Em particular a homologia de  $M$  a coeficientes reais  $H_k(M, \mathbb{R})$  é um espaço vetorial de dimensão finita,  $\forall k \geq 0$ .

O invariante topológico

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^k \dim H_k(M, \mathbb{R})$$

chama-se a característica de Euler-Poincaré de  $M$ .

Existem várias fórmulas que permitem o cálculo de  $\chi(M)$ . Entre elas vamos lembrar as seguintes:

**1.14 Teorema:** Se  $M$  é homotopicamente equivalente a um complexo simplicial finito, então  $\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot c_i$  onde  $c_i$  é o número de simplexes de dimensão  $i$ .

**1.15 Teorema:** Se  $\pi : M \rightarrow N$  é um revestimento de  $m$  folhas,  $M$  e  $N$  conexos, então  $\chi(M) = m \cdot \chi(N)$

**1.16 Teorema:** Se  $M$  é uma variedade compacta e sem bordo e  $\Psi$  um campo tangente com singularidades isoladas  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , então:

$$\chi(M) = \sum_l i(x_l, \Psi)$$

onde  $i(x_l, \Psi)$  é o índice de  $\Psi$  em  $x_l$  introduzido anteriormente.

## CAPÍTULO 2

# HIPERSUPERFÍCIES DO TIPO GEOMÉTRICO FINITO. O TEOREMA DE JORGE-MEEKS.

**2.1 Definição:** *Seja  $\bar{M}^n$  uma variedade orientável  $n$ -dimensional compacta,  $p_1, p_2, \dots, p_k$  pontos em  $\bar{M}$  e  $M = \bar{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$ . Uma imersão  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é chamado do tipo geométrico finito se:*

- a)  $M$  é completa com a métrica induzida.*
- b) A aplicação normal de Gauss  $g : M \rightarrow S^n$  se estende a uma aplicação diferenciável  $\bar{g} : \bar{M} \rightarrow S^n$ .*
- c) As fibras críticas, ou seja, a imagem inversa dos valores críticos de  $\bar{g}$ , estão contidas em uma reunião finita de subvariedades conexas de dimensão  $\leq n - 2$ .*

**2.2 Observação:** *Pelo teorema 1.9, a definição 2.1 é uma extensão do conceito de superfície mínima completa com curvatura total finita.*

**2.3 Definição:** *Os pontos omitidos  $\{p_1, \dots, p_k\}$  são chamados de fins da imersão  $f$ . Às vezes, as vizinhanças desses pontos também serão chamadas de fins.*

Estamos interessados em saber qual é o comportamento qualitativo de uma imersão do tipo geométrico finito quando a mesma é restringida aos fins. Para isso, provaremos alguns lemas em seguida. O resultado principal (teorema 2.7) é devido a L. Jorge e W. Meeks (veja [5]) e descreve a geometria da imersão perto dos fins.

**2.4 Lema:** *Sejam  $X$  e  $Y$  variedades diferenciáveis de mesma dimensão,  $X$  compacto,  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação diferenciável e  $y \in Y$  um valor regular de  $f$ . Então:*

a)  $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , ou seja,  $\#f^{-1}(y) < \infty$ .

b) *Existe uma vizinhança  $U$  de  $y$  tal que  $f^{-1}(U)$  é uma união disjunta  $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_N$ , onde  $V_i$  é uma vizinhança aberta de  $x_i$  com  $f(V_i) = U$  e  $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  é difeomorfismo.*

*Demonstração:*

a) Suponha que existam infinitos pontos em  $f^{-1}(y)$ . Pela compacidade de  $X$ , existe uma seqüência  $(x_n)$  em  $f^{-1}(y)$ , com  $(x_n) \rightarrow x$  e  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j$ .  $x \in f^{-1}(y)$  pela continuidade de  $f$ . O fato de  $y$  ser valor regular de  $f$  e  $x \in f^{-1}(y) \Rightarrow \exists$  vizinhança  $V_x$  de  $x$  tal que  $f|_{V_x}$  é 1-1. Mas toda vizinhança  $V_x$  de  $x$  contém infinitos elementos de  $f^{-1}(y)$ , pois  $x$  é ponto de acumulação de  $(x_n)$ . Absurdo. Portanto  $\#f^{-1}(y) < \infty$ .

b) Tome vizinhanças  $W_i$  de  $x_i$  disjuntas duas a duas, de modo que  $f|_{W_i} : W_i \rightarrow f(W_i)$  é difeomorfismo.  $X - \bigcup_{i=1}^N W_i$  é compacto  $\Rightarrow \bar{U} = f(X - \bigcup_{i=1}^N W_i)$  é compacto e não contém  $y$ . Sejam  $U = (Y - \bar{U}) \cap [\bigcap_{i=1}^N f(W_i)]$  e  $V_i = W_i \cap f^{-1}(U)$ . Afirmamos que o  $U$  e os  $V_i$ 's acima definidos servem.

$$\text{b1) } f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^N V_i$$

$$(\supset) x \in \bigcup_{i=1}^N V_i \Leftrightarrow x \in V_i \text{ algum } i \Rightarrow x \in f^{-1}(U)$$

$$(\subset) x \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(x) \in [Y - f(X - \bigcup_{i=1}^N W_i)] \Rightarrow f(x) \notin f(X - \bigcup_{i=1}^N W_i) \Rightarrow$$

$$x \in \bigcup_{i=1}^N W_i \Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^N V_i$$

$$\text{b2) } f(V_i) = U$$

$$(\subset) f(V_i) \subset f(f^{-1}(U)) = U$$

$$(\supset) f(W_i) \supset U \Rightarrow \forall x \in U, \exists z_i \in W_i \text{ tq. } f(z_i) = x$$



$$z_i \in f^{-1}(U) \Rightarrow z_i \in f^{-1}(U) \cap W_i = V_i \Rightarrow x \in f(V_i)$$

b3)  $f|_{V_i}: V_i \rightarrow U$  é difeomorfismo porque ela é uma restrição de  $f|_{W_i}: W_i \rightarrow f(W_i)$  que é difeomorfismo.  $\square$

**2.5 Observação:** O lema 2.4 garante que sob as hipóteses da definição 2.1,  $\bar{g}$  é uma aplicação de recobrimento fora das fibras críticas. Em particular, se  $c_n$  denota o volume da  $n$ -esfera unitária e  $G(x)$  a curvatura de Gauss-Kronecker de  $M$  em  $x$ , temos que:

$$|K_T| = \int_M |G(x)| dM = m \cdot c_n, \quad m = \text{grau}(g)$$

onde  $K_T$  é a curvatura total de  $M$ .

**2.6 Proposição:** Seja  $\bar{M}^n$  uma variedade Riemanniana com bordo completa (Toda seqüência de Cauchy converge),  $\partial\bar{M}$  compacto, e  $f: M = \{\bar{M} - \partial\bar{M}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo local tal que  $k \cdot \|v\| \leq \|df_x(v)\|$  para  $\forall x \in M$ ,  $v \in T_x M$ . Então existe uma subvariedade  $N$  de  $\bar{M}$  tal que  $f|_N: N \rightarrow f(N) = \mathbb{R}^n - \bar{B}_s^n(0) = D$  é um revestimento.

*Demonstração:*

Já que  $\partial M$  é compacto, existe  $s$  suficientemente grande tal que  $\partial M \subset B_s^n(0)$ . Seja  $N = f^{-1}(D)$ . É óbvio que  $N$  é subvariedade de  $M$ . Note que o fecho  $\bar{N}$  de  $N$  em  $M$  é uma variedade com bordo completa. A afirmação é que  $g = f|_N: N \rightarrow D$  é um revestimento. Para isso, basta demonstrar que  $g$  levanta caminhos diferenciável por partes.

Seja  $y \in D$ ,  $x \in f^{-1}(y)$  e  $c: [0, 1] \rightarrow D$  tal que  $c(0) = y$ . Queremos levantar  $c$  a uma curva  $\bar{c}$  em  $N$  onde  $\bar{c}(0) = x$ . Seja  $A \subset [0, 1]$  o conjunto maximal onde  $c$  pode ser levantado. O fato de  $f$  ser difeo-local e  $D$  ser aberto implica que o intervalo maximal onde  $c$  pode ser levantada é do tipo

$[0, t_0)$ , ou seja um aberto em  $[0, 1]$ . Se provarmos que  $c$  pode ser levantada inclusive até  $t_0$ , teremos provado que o intervalo máximo de levantamento de  $c$  é fechado em  $[0, 1]$ . Portanto o intervalo máximo de levantamento deverá ser  $[0, 1]$  pela conexidade de  $[0, 1]$ .

Seja  $(t_n)$  uma seqüência crescente em  $A$  tendendo a  $t_0$ ,  $(a_n) = (c(t_n)) \subset D$  e  $(b_n) = (\bar{c}(t_n)) \subset N$ . O fato de  $(t_n)$  ser convergente e  $c$  ser contínua, implica que  $(a_n)$  é convergente e portanto de Cauchy. A desigualdade  $k \cdot \|v\| \leq \|df_p(v)\|$  tem como consequência  $(b_n)$  ser de Cauchy. De fato:

$$\text{dist}(b_m, b_n) \leq \int_{t_n}^{t_m} \|c'(t)\| dt \leq k^{-1} \cdot \int_{t_n}^{t_m} \|c'(t)\| dt \leq H |t_m - t_n|$$

onde  $H = k^{-1} \cdot \sup_{0 \leq t \leq 1} \|c'(t)\| < \infty$ . Portanto  $(b_n)$  é de Cauchy.

Já que  $\bar{N}$  é completa, pode se garantir que  $(b_n)$  converge em  $\bar{N}$  pela completude da mesma. Além disso,  $f(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in D$ , sendo que a última pertinência segue-se do fato que  $a \in c \subset D$ . Já que  $f(\partial N) \subset \partial D$ , temos que  $b \in f^{-1}(D) = N$ .

Seja  $V \subset N$  uma vizinhança de  $b$  tal que  $f|_V$  é difeomorfismo. Então  $c(t_0) \in f(V)$  e por continuidade, existe um intervalo  $I \subset [0, 1]$ ,  $t_0 \in I$ , tal que  $c(I) \subset f(V)$ . Escolha um índice  $n$  tal que  $\bar{c}(t_n) \in V$  e considere o levantamento  $l$  de  $c$  em  $I$  passando por  $b$ . Os levantamentos  $l$  e  $\bar{c}$  coincidem em  $[0, t_n) \cap I$ , pois  $f|_V$  é biunívoca. Portanto,  $l$  é uma extensão de  $\bar{c}$  em  $I$ , donde  $\bar{c}$  está definido em  $t_0$  e  $t_0 \in A$  o que conclui a proposição.

**2.7 Teorema:** *Seja  $E$  um fim de  $M^n$ ,  $n \geq 2$ , e seja  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão completa. Seja  $v$  um vetor em  $\mathbb{R}^{n+1}$  tal que o ângulo  $\theta$  entre  $v$  e  $df_x(T_x E)$  é maior do que  $\lambda > 0$  para todo  $x \in E$  e  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  a projeção no espaço ortogonal a  $v$ . Então:*

(1) *Existe um fim  $E' \subset E \subset M$  tal que  $(\pi \circ f)|_{E'}$  é um revestimento. Em particular, se  $n \geq 3$ ,  $E'$  é difeomorfo a  $S^n \times [0, \infty)$  e  $f|_{E'}$  é um mergulho.*

(2) *Se  $n \geq 3$  e a normal de  $f$  tende à  $v$  quando  $\|x\| \rightarrow \infty$  temos que:*

(a) Para  $r$  grande,  $Y_r = f(E') \cap S_r^n$  é homeomorfa a uma  $(n-1)$ -esfera.

(b)  $X_r = \frac{1}{r}(f(E) \cap S_r^n)$

converge a uma subesfera totalmente geodésica  $S^{n-1}$  em  $S^n$  com multiplicidade 1 quando  $r \rightarrow \infty$ .

(3) Se  $n = 2$  e a normal de  $f$  tende à  $v$  quando  $\|x\| \rightarrow \infty$  temos que:

(a) Para  $r$  grande,  $Y_r = f(E') \cap S_r^n$  é uma curva fechada.

(b)  $X_r = \frac{1}{r}(f(E) \cap S_r^n)$  converge a uma geodésica  $S^1$  em  $S^2$  com multiplicidade  $I \geq 1$ , onde  $I$  é o grau de  $(\pi \circ f)|_{E'}$ .

*Demonstração:*

(1) A imersão  $(\pi \circ f)$  de  $E$  está exatamente nas condições da proposição 2.6. Portanto é imediato a primeira afirmação de (1).

Quando temos um revestimento sobre um contradomínio simplesmente conexo, a aplicação é um difeomorfismo. Isso prova a segunda afirmação de (1).

(2)(a) Seja  $D_v$  o subespaço unidimensional em  $\mathbb{R}^{n+1}$  gerado por  $v$ . Seja  $D_v^\perp$  o subespaço ortogonal a  $D_v$ . Tome a esfera unitária  $S^{n-1}$  contida em  $D_v^\perp$ . O que faremos é construir um homeomorfismo entre esse  $S^{n-1}$  e  $Y_r$ .

Segundo a proposição 2.6, existe  $\tilde{r} > 0$  tal que  $\pi \circ f|_{E':=(\pi \circ f)^{-1}(R^n - \bar{B}_{\tilde{r}}^n(0))}$  é um revestimento. Por simplicidade, chame  $f|_{E'}$  de  $f$ .

Tome  $x \in S^{n-1}$ .  $R_x := \{sx; s > \tilde{r}\}$ .  $P_x := D_v \times R_x$ . Note que  $P_x$  é transversal a  $f(E')$  e isso implica que  $f^{-1}(\gamma_x := f(E') \cap P_x)$  é uma 1-variedade em  $E'$ . Além disso, o fato de  $\pi \circ f$  ser difeomorfismo entre  $E'$  e  $D_v^\perp - \bar{B}_{\tilde{r}}^n(0)$  nos garante que  $\gamma_x$  é o gráfico de uma função  $g_x: R_x \rightarrow D_v$ .

Seja  $g'_x(y) := \frac{\partial g_x}{\partial \|y\|}(y)$ . O fato da normal de  $f$  tender a  $v$  quando  $\|y\| \rightarrow \infty$  nos garante que  $\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} g'_x(y) = 0$ .

Para cada  $x \in S^{n-1}$  conseguimos obter curvas  $\gamma_x$ . Queremos que para um  $r > 0$  suficientemente grande,  $S_r^n \cap \gamma_x$  seja um único ponto para todo

$x \in S^{n-1}$ . Fazendo isso, conseguiríamos definir uma função de  $S^{n-1}$  em  $Y_r$  dado por  $x \mapsto S_r^n \cap \gamma_x$ .

O primeiro passo para a obtenção dessa função é provar que fixado  $x \in S^{n-1}$ , existe um  $r_x$  suficientemente grande tal que  $S_r^n \cap \gamma_x$  é um ponto para  $r' > r_x$ .

Defina a função  $h_x : R_x \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $h_x(y) = \sqrt{\|y\|^2 + g_x^2(y)}$ . Geometricamente essa é a função que dá a distância entre a imagem de  $g_x$  e a origem. Note que o fato de  $h_x(y)$  ir para infinito quando  $\|y\| \rightarrow \infty$  garante que para  $r'$  suficientemente grande,  $\gamma_x \cap S_{r'}^n$  não é vazia.

Temos que:

$$h'_x(y) = \frac{2 \cdot \|y\| + 2 \cdot g_x(y) \cdot g'_x(y)}{2 \cdot \sqrt{\|y\|^2 + g_x^2(y)}} = \frac{\|y\|}{\sqrt{\|y\|^2 + g_x^2(y)}} \cdot \left(1 + \frac{g_x(y)}{\|y\|} \cdot g'_x(y)\right)$$

onde  $h'_x := \frac{\partial h_x}{\partial \|y\|}(y)$ .

É fácil ver que  $\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} \frac{g_x(y)}{\|y\|} = 0$  como consequência de  $\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} g'_x(y) = 0$ .

Das condições  $\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} \frac{g_x(y)}{\|y\|} = 0$  e  $\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} g'_x(y) = 0$  segue-se que existe  $\bar{r}_x$  tal que se  $\|y\| \geq \bar{r}_x$ ,  $h'_x(y) = \frac{\|y\|}{\sqrt{\|y\|^2 + g_x^2(y)}} \cdot \left(1 + \frac{g_x(y)}{\|y\|} \cdot g'_x(y)\right) \geq c > 0$ .  $h_x$  é estritamente crescente para  $\|y\| \geq \bar{r}_x$ . Note que podemos tomar um  $r_x$  suficientemente grande de modo que a intersecção de  $\gamma_x$  com  $S_{r'}^n$  seja um único ponto para  $r' \geq r_x$ .

Devemos provar agora a existência de um  $r$  tal que  $\gamma_x \cap S_r^n$  é um único ponto para todo  $x \in S^{n-1}$  e  $r' > r$ .

Dado  $x \in S^{n-1}$ , existe  $r_x$  tal que  $h_x$  é crescente (ou seja,  $h'_x(y) > 0$ ) para todo  $y$  com norma maior que  $r_x$ . A continuidade de  $h'$  (como função de  $x$  e de  $y$ ) nos garante que existe uma vizinhança  $V_x$  de  $x$  tal que  $h_x(y)$  é crescente para todo  $x \in V_x$  e  $y$  com norma maior que  $r_x$ . Cubra  $S^{n-1}$  com tais vizinhanças. A compacidade de  $S^{n-1}$  nos permite tomar uma subcobertura finita dessas vizinhanças. Com isso, conseguimos achar um  $\bar{r}$  tal que  $h_x(y)$  é crescente para todo  $x \in S^{n-1}$  e todo  $y$  com norma maior que  $\bar{r}$ . Note que

existe  $M$  tal que  $\|h_x(y)\| \leq M$  para todo  $x \in S^{n-1}$  e  $y \in R_x$  com  $\|y\| \leq \bar{r}$ . Tomando  $r > \max\{\bar{r}, M\}$ ,  $S_r^n \cap \gamma_x$  é exatamente um ponto.

Fixe um  $r' > r$ . Defina a função  $\bar{q} : S^{n-1} \rightarrow Y_{r'}$  dada por  $\bar{q}(x) = \gamma_x \cap S_{r'}^n$ . A função é bem definida (devido a todo o argumento acima exposto), 1-1 (pois se  $x \neq y$ ,  $P_x \cap P_y = \emptyset$ ) e sobrejetiva (tome  $z \in Y_{r'}$ .  $z \in P_{\bar{z}}$  para algum  $\bar{z} \in S^{n-1}$  (pois  $\bigcup_{x \in S^{n-1}} P_x \supset f(E')$ ). Então  $\bar{q}(\bar{z}) = z$ ).

Para mostrar que  $\bar{q}$  é homeomorfismo basta provar que  $q = \bar{q}^{-1}$  é um homeomorfismo.  $q : Y_{r'} \rightarrow S^{n-1}$  é uma aplicação bijetora cujo domínio é compacto e o contradomínio é Hausdorff. Se provarmos que  $q$  é contínua, teremos devido a um resultado de topologia que  $q$  é homeomorfismo.

Para provar que  $q$  é contínua, tome um aberto  $O$  em  $S^{n-1}$ .  $C_O = \{\bigcup_{x \in O} P_x\}$  é aberto em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .  $q^{-1}(O) = \bar{q}(O) = Y_{r'} \cap C_O$  é aberto em  $Y_{r'}$ , o que demonstra (2) (a).

(2) (b) Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $r_\epsilon$  tal que  $\frac{g_x(y)}{\|y\|} < \epsilon$  para todo  $\|y\| > r_\epsilon$  e  $x \in S^{n-1}$ . Adotemos um sistema de coordenadas do tipo  $\mathbb{R}^{n+1} = D_v^\perp \oplus D_v$ . Queremos provar que

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \text{ang}((y, g(y)), v) = \frac{\pi}{2} \quad \text{onde } y = (y_1, \dots, y_n) \in D_v^\perp$$

pois assim o teorema estará demonstrado. Temos que:

$$\begin{aligned} \cos(\text{ang}((y, g_x(y)), v)) &= \left\langle \frac{(y, g_x(y))}{\sqrt{\|y\|^2 + g_x^2(y)}}, (0, 0, \dots, 0, 1) \right\rangle = \\ &= \frac{g_x(y)}{\sqrt{\|y\|^2 + g_x^2(y)}} \leq \frac{g_x(y)}{\|y\|} < \epsilon \end{aligned}$$

para  $\|y\| > r_\epsilon$ . Com isso, temos que

$$X_r = \frac{1}{r} (f(E') \cap S_r^n)$$

converge para  $S^{n-1} \subset D_v^\perp$  que é uma  $(n-1)$ -esfera totalmente geodésica.

(3) Por um argumento semelhante ao usado na prova de (2)(a) deste teorema, existe  $r$  suficientemente grande tal que  $S_r^2$  é transversal a  $f(E')$  para  $r' > r$ . Além disso,  $f^{-1}(f(E') \cap P_x \cap S_r^2) = \{p_1, \dots, p_I\}$ , onde  $I$  é o grau do revestimento  $\pi \circ f$ .

Seja  $D$  o complementar de uma bola fechada de raio suficientemente grande em  $D_v^\perp$ . Então  $\pi \circ f : E' \rightarrow D$  é um revestimento de  $I$  folhas. Portanto a curva  $c_r(t) = r(\cos 2\pi It, \sin 2\pi It)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  de  $D$  levanta a um gerador  $\gamma$  de  $\pi_1(E')$ . Por construção,  $\gamma$  é a imagem inversa via  $f$  da interseção de  $f(E')$  com o cilindro  $C_r$  cuja base é o círculo de  $D_v^\perp$  com centro na origem e raio  $r$  e eixo  $D_v$ .

Seja  $s$  suficientemente grande tal que  $C_r^s = \{(x_1, x_2, x_3) \in C_r : |x_3| < s\}$  contém  $f(\gamma)$ . Consideraremos em  $\mathbb{R}^3$  uma homotopia  $H$  entre  $C_r^s$  e  $S_r^2 - \{p_N, p_S\}$ , onde  $p_N$  e  $p_S$  são os polos norte e sul de  $S_r^2$ . Podemos supor que  $\forall t$ ,  $H_t = H(t, \cdot)$  é uma superfície de  $\mathbb{R}^3$  que intersecta  $f(E')$  transversalmente. Construímos então uma homotopia entre  $f(E') \cap C_r^s$  e  $f(E') \cap S_r^2$  da seguinte maneira:  $f^{-1}(f(E') \cap P_x)$  são  $I$  curvas.  $H_1$  pode ser construída de maneira que cada curva intercepte um elemento da imagem de  $H_1$  em um único ponto. A medida que se passa de  $\tilde{C}_{r'}$  para  $S_{r'}^2$  via  $H_1$ , cada ponto de  $f^{-1}(f(E') \cap C_{r'})$  passa a um ponto de  $f^{-1}(f(E') \cap S_{r'}^2)$  via uma curva de  $f^{-1}(f(E') \cap P_x)$ . Portanto  $f^{-1}(f(E') \cap S_{r'}^2) = \beta$  é uma curva fechada que representa um gerador de  $\pi_1(E')$  e  $f(\beta)$  dá  $I$  voltas em torno do eixo  $z$ . Por uma conta análoga ao feito no caso (2)(b), chegamos ao resultado de que  $f(E') \cap S_{r'}^2$  tende ao  $S_r^1$  com multiplicidade  $I$  quando  $r'$  tende ao infinito.  $\square$

**2.8 Observação:** Note que se uma superfície do tipo geométrico finito não trivial é mergulhada,  $g$  pode omitir no máximo 2 pontos. De fato,  $\bar{g}$  leva os fins para esses pontos omitidos. Se existem 3 ou mais pontos omitidos pela

*aplicação normal de Gauss é imediato pelo teorema 2.7 que a imersão não pode ser um mergulho, pois neste caso, os fins necessariamente se interseccionam.*

## CAPÍTULO 3

### GRADIENTE DAS FUNÇÕES ALTURA.

Sejam  $\bar{M}^n$  uma variedade compacta,  $M^n = \bar{M}^n - \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  com  $p_i \in \bar{M}$  e  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão do tipo geométrico finito sendo  $g : M^n \rightarrow S^n$  a aplicação normal de Gauss associada associada a  $f$ .  $m$  denotará o grau da aplicação normal de Gauss.

Nesta seção iremos estudar o campo gradiente das funções altura em  $f$ . Iremos calcular o índice de suas singularidades e utilizaremos isso para o cálculo da característica de Euler-Poincaré de  $\bar{M}$  em termos de  $k$  e  $m$ . Denotaremos por  $\sigma$  o sinal da curvatura de Gauss-Kronecker  $\sigma = G(x)/|G(x)|$ , quando  $G(x) \neq 0$ .

Dado um vetor fixo  $\xi \in S^n$ , a função altura na direção  $\xi$  é a função  $h_\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_\xi(x) = \langle f(x), \xi \rangle$ . O gradiente  $X_\xi$  de  $h_\xi$  é geometricamente a projeção de  $\xi$  em  $T_x M$ . Mais precisamente  $X_\xi = (df)_x^{-1}(\xi - \langle \xi, g(x) \rangle g(x))$ .

**3.1 Lema:** *Seja  $x$  um ponto crítico não degenerado de  $h_\xi$ . Então  $\xi \in [(df)_x(T_x M)]^\perp$  e a Hessiana de  $h_\xi$  em  $x$  é a segunda forma fundamental  $S_\xi$ .*

*Demonstração:*

$$(dh_\xi)_x Y = ((df)_x(Y), \xi)$$

Portanto  $x$  é crítico se e somente se  $\xi$  é ortogonal a  $(df)_x(T_x M)$ . Neste caso:

$$Hess(h_\xi)(X, Y) = X \cdot (dh_\xi)Y = \langle \bar{\nabla}_x Y, \xi \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle = \langle X, S_\xi Y \rangle$$

o que mostra a segunda afirmação.  $\square$



**3.2 Lema:** a) As singularidades de  $X_\xi$  são os pontos  $g^{-1}(\pm\xi)$  e se  $\xi$  é um valor regular de  $g$ , o índice de  $X_\xi$  em  $x \in g^{-1}(\pm\xi)$  é  $(\pm 1)^n \sigma$ .

b)  $X_\xi$  se estende a um campo de vetores em  $\bar{M}$  que se anula nos fins.

*Demonstração:*

a) A afirmação de que as singularidades de  $X_\xi$  são os pontos  $g^{-1}(\pm\xi)$  é óbvia. A afirmação sobre o índice segue do lema 3.1 e do lema 1.13.

b) Separaremos a prova em dois casos: quando o fim é mergulhado e quando não é.

b1) *O fim é mergulhado*

Considere uma parametrização de um fim  $E$  onde o domínio é um disco na esfera unitária com centro no polo sul. A imagem do fim é o gráfico de uma função no complemento de uma bola suficientemente grande do hiperplano  $g(p_i)^\perp$  (Veja o teorema 2.7).  $(df)_x(X_\xi)$  é um campo de vetores com norma limitada. É lógico que via projeção estereográfica, o campo de vetores na vizinhança do polo sul da esfera vai a zero a medida que nos aproximamos do fim. Note que se  $\xi \neq \pm \lim_{x \rightarrow p} g(x)$ , a singularidade é isolada no fim.

b2) *O fim não é mergulhado*

No lema 3.3, far-se-á o cálculo do índice dos campos gradiente da função altura nos fins no caso onde  $\xi \neq \pm \lim_{x \rightarrow p} g(x)$ . No caso não mergulhado, teremos que o índice é  $1 + I(p) \neq 0$ , onde  $I(p)$  é o grau do fim visto como revestimento, o que comprova a existência de uma singularidade isolada no fim para o caso não mergulhado.

Finalmente, é óbvio que o campo se anula no caso em que  $\xi = \pm \lim_{x \rightarrow p} g(x)$ .  $\square$

**3.3 Lema:** O índice de  $X_\xi$  em um fim  $p$  tal que  $\bar{g}(p) \neq \pm\xi$  é  $1 + (-1)^n$  se o fim é mergulhado e  $1 + I(p)$  caso contrário.

*Demonstração:*

Consideraremos primeiro o caso onde o fim é mergulhado. Utilizando um raciocínio semelhante ao do lema 3.2, nós temos que  $(df)_x(X_\xi)$  é um campo de vetores quase constante cuja projeção sobre o domínio do gráfico tem norma limitada diferente de zero (pois  $g(p) \neq \pm \xi$ ). Portanto o índice da projeção ao longo de uma esfera de raio suficientemente grande é nulo e a projeção se estende para um campo não nulo no interior da esfera. Projetamos o campo estendido na esfera unitária via projeção estereográfica e obtemos um campo vetorial com uma única singularidade no polo sul cujo índice é  $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ .

Para o caso não mergulhado, usaremos a fórmula de tangência para o cálculo de índices de campos vetoriais no plano.

Seja  $\gamma$  uma curva fechada ao redor de uma singularidade tal que o campo é não nulo ao longo de  $\gamma$  e que é tangente somente em um número finito de pontos. Seja  $n_e$  o número de pontos de  $\gamma$  onde a curva integral do campo de vetores é localmente externa a  $\gamma$  e  $n_i$  o número de pontos onde a curva integral é localmente interna a  $\gamma$ . Então o índice do campo de vetores é  $(2 + n_i - n_e)/2$  veja [4].

Voltando ao caso em questão, consideramos uma curva simples fechada  $\gamma$  ao redor do fim. Esta curva representa um gerador do grupo fundamental do fim e portanto sua imagem  $(\pi \circ f) \circ \gamma$  é uma curva que representa o  $I(p)$ -múltiplo de um gerador do grupo fundamental do complemento de um disco no plano. Ele é portanto homotópica a uma curva simples fechada  $\vartheta$  percorrida  $I(p)$  vezes. O levantamento de  $\vartheta$  representa uma curva homotópica a  $\gamma$ . Para cada volta na curva pertencente ao plano do domínio, o índice do campo projetado é  $0 = (2 + n_i - n_e)/2$ . Portanto  $(n_i - n_e) = -2$  para cada volta completa dada. Observe que as tangências externas (resp. internas) do fluxo do campo projetado ao longo de  $\vartheta$  correspondem às tangências internas

(resp. externas) ao longo de  $\gamma$  do fluxo de  $X_\xi$ . Portanto o índice de  $X_\xi$  ao longo de  $\gamma$  é  $(2 + I(p)(n_e - n_i))/2 = 1 + I(p)$ .

**3.4 Teorema:** *Se  $M$  é de dimensão par, a característica de Euler-Poincaré de  $\bar{M}$  é*

$$\chi(\bar{M}) = \sum_i (1 + I(p_i)) + 2\sigma m \quad (3.1)$$

*Demonstração:*

Conte os índices das singularidades de  $X_\xi$  quando  $\xi$  é um valor regular da aplicação normal de Gauss,  $\xi \neq \pm g(p_i)$ .  $\square$

## CAPÍTULO 4

# A IMAGEM DA APLICAÇÃO NORMAL DE GAUSS DAS SUPERFÍCIES DO TIPO GEOMÉTRICO FINITO.

É sabido que para imersões mínimas completas com curvatura total finita,  $\#\{S^2 - g(M)\} \leq 3$ . Neste capítulo iremos generalizar este resultado para superfícies do tipo geométrico finito  $f : M = \bar{M} - \{p_1, \dots, p_k\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Observamos explicitamente que, por definição, os zeros da curvatura de Gauss-Kronecker são em número finito.

Para tal fim, precisamos do conceito de revestimento ramificado. Sejam  $M$  e  $N$  duas superfícies compactas e conexas e  $f : M \rightarrow N$  uma função diferenciável. Lembremos que as fibras críticas de  $f$  são as imagens inversas dos valores críticos.

**4.1 Definição:** Diremos que  $f$  é um revestimento ramificado se a reunião das fibras críticas é um conjunto finito.

Se  $f$  é um revestimento ramificado, vimos em 2.4 que a restrição de  $f$  ao complemento das fibras críticas é um revestimento sobre a imagem (que é finita e portanto não desconecta  $N$ ). Seja  $q$  um valor crítico de  $f$  e  $\{p_1, \dots, p_e\} = f^{-1}(q)$  e  $U_1, \dots, U_e$  vizinhanças disjuntas de  $p_1, \dots, p_e$ . Se os  $U_j$  são suficientemente pequenos, pode-se mostrar que  $W = \bigcap_{i=1}^e f(U_i)$  é uma vizinhança de  $q$  que não contém outros valores críticos e se  $\bar{q} \in W - \{q\}$ ,  $f^{-1}(\bar{q})$  intersecta  $U_i$  em  $\nu(p_i)$  pontos.

**4.2 Definição:** O número  $\nu(p_i)$  definido acima, é chamado de número de ramificação de  $f$  em  $p_i$ . Os pontos  $p$  tais que  $\nu(p) > 1$  são chamados de pontos de ramificação. Os pontos  $p$  tais que  $\nu(p) = 1$  são chamados de pontos regulares.

Temos a seguinte generalização do teorema 1.15.

**4.3 Proposição.** Seja  $M^2$  uma superfície compacta,  $f : M^2 \rightarrow S^2$  uma aplicação tal que  $\tilde{f} = f|_{M^2 - \{p_1, \dots, p_k\}} : [M^2 - \{p_1, \dots, p_k\}] \rightarrow X = [S^2 - \{f(p_1), \dots, f(p_k)\}]$  é um revestimento. Seja  $m = \#\tilde{f}^{-1}(p)$  e  $\nu(p_i)$  o número de ramificação de  $p_i$ . Temos então que:

$$\chi(M) = 2m + \sum_{i=1}^k (1 - \nu(p_i)) \quad (4.1)$$

*Demonstração:*

$\tilde{f}$  recobre  $(S^2 - \{f(p_1), \dots, f(p_k)\})$   $m$  vezes. Temos então que:

$$\chi(M) - k = m[\chi(S^2) - q] = 2m - mq \quad (4.2)$$

onde  $q = \#(S^2 - X)$ .

Fixe  $r_i \in \{f(p_1), \dots, f(p_k)\}$ . Denote  $Y_i = f^{-1}(r_i)$ . Note que se somarmos os números de ramificação dos pontos de  $f^{-1}(r_i)$  obteremos  $m$ . Faça isso com os  $q$  pontos de  $\{f(p_1), \dots, f(p_k)\}$ . Feito isso, obtemos a igualdade:

$$\sum_{i=1}^k \nu(p_i) = mq \quad (4.3)$$

Substituindo (4.3) em (4.2) temos:

$$\chi(M) = 2m + k - \sum_{i=1}^k \nu(p_i) = 2m + \sum_{i=1}^k [1 - \nu(p_i)]$$

conforme o desejado.  $\square$

**4.4 Observação:** Observe que na fórmula (4.1),  $[1 - \nu(p_i)] \neq 0$  somente quando  $\nu(p_i) > 1$ .

**4.5 Teorema:** Para uma superfície  $f : M = \bar{M} - \{p_1, \dots, p_k\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  do tipo geométrico finito onde a curvatura de Gauss-Kronecker se anula somente em pontos isolados  $\{p_{k+1}, \dots, p_t\}$ , o conjunto  $S^2 - g(M)$  contém no máximo três pontos.

*Demonstração:*

Não é difícil provar que  $L = \bar{g}^{-1}(\bar{g}(\{p_1, \dots, p_t\}))$  é um conjunto de pontos finito. Podemos utilizar a proposição anterior na aplicação  $\hat{g} : \bar{g}|_{\bar{M}-L}$  o que nos dá:

$$\chi(\bar{M}) = 2m + \sum_{i=1}^t [1 - \nu(p_i)] + \sum_{p \in D} [1 - \nu(p)]$$

onde  $D = L - \{p_1, \dots, p_t\}$ .

Note que a segunda somatória é nula, pois  $\nu(p) = 1$  para  $p \in D$ . Com isso temos que:

$$\chi(\bar{M}) = 2m + \sum_{i=1}^t [1 - \nu(p_i)]$$

Suponha que  $g$  omita  $n$  pontos  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Seja  $A_i = \{p \in \bar{M} - M : g(p) = \xi_i\}$ ,  $B = \{p \in \bar{M} - M : g(p) \neq \xi_i\}$  e  $C = \{q \in M : \nu(q) > 1\}$ . Seja  $\xi$  um valor regular de  $g$ ,  $\xi \neq \xi_i$ . Podemos escrever (4.1) da seguinte maneira:

$$\chi(\bar{M}) = 2m + \sum_{i=1}^n \sum_{p \in A_i} (1 - \nu(p)) + \sum_{p \in B} (1 - \nu(p)) + \sum_{p \in C} (1 - \nu(p))$$

Observe que  $\sum_{p \in A_i} \nu(p) = m$  e  $\sum_{i=1}^n |A_i| + |B| = k$ . Então:

$$\chi(\bar{M}) = (2 - n).m + k - \sum_{p \in B} \nu(p) + \sum_{p \in C} (1 - \nu(p)) \quad (4.4)$$

Comparando (4.4) com (3.1) obtemos:

$$\sum_{p \in (\cup A_i) \cup B} I(p) = (4 - n).m - [\sum_{p \in B} \nu(p) - \sum_{p \in C} (1 - \nu(p))] \quad (4.5)$$

e portanto  $n < 4$  conforme o afirmado.

**4.6 Corolário:** *Nas hipóteses do teorema 4.5, se  $n = 3$  então  $\chi(\bar{M}) \leq 0$ . Além disso se  $\chi(\bar{M}) = 0$ , temos que:*

- a)  $m = k$
- b)  $B = C = \emptyset$ .
- c)  $\sum I(p_i) = k$ , ou seja, cada fim é mergulhado.

*Demonstração:*

Se  $n = 3$  temos de 4.4

$$\chi(\bar{M}) = (k - m) - [\sum_{p \in B} \nu(p) - \sum_{p \in C} (1 - \nu(p))] \quad (4.6)$$

mas

$$2 \geq \chi(\bar{M}) \geq 2(k - m) \implies k \leq m + 1$$

então

$$\chi(\bar{M}) \leq 1 - [\sum_{p \in B} \nu(p) - \sum_{p \in C} (1 - \nu(p))] \leq 1$$

mas  $\chi(\bar{M})$  não pode ser ímpar. Portanto

$$\chi(\bar{M}) \leq 0$$

Se  $\chi(\bar{M}) = 0$ ,  $k - m \leq 0$  e

$$0 = \chi(\bar{M}) \leq 0 - \left[ \sum_{p \in B} \nu(p) - \sum_{p \in C} (1 - \nu(p)) \right] \leq 0$$

Logo  $B = C = \emptyset$ .

De (4.6)  $m = k$ . De (3.1) temos que  $\sum_{i=1}^k I(p_i) = k$ , ou seja, todos os fins são mergulhados.

**4.7 Observação:** *A prova no caso de superfícies mínimas completas de curvatura total finita é muito parecida com o exposto acima com a diferença de que as fórmulas (3.1) e (4.1) são obtidas via representação de Weierstrass, recurso que não existe fora do caso de superfícies mínimas.*

Queremos introduzir agora o conceito de fins não degenerados e provaremos que neste caso, a aplicação normal de Gauss omite no máximo 2 pontos. Um vetor unitário  $\xi$  é um valor regular da aplicação normal de Gauss se sua imagem inversa não contém pontos com curvatura Gaussiana nula e portanto  $\nu(p) = 1$  para todo  $p \in g^{-1}(\xi)$ . Com o objetivo de estender este conceito para um fim  $p \in \bar{M} - M$ , precisamos levar em conta primeiro que a curvatura vai a zero quando nos aproximamos de  $p$  e também que  $p$  pode não ser um fim mergulhado. Este fato, conforme visto, é medido pelo número  $I(p)$ . Com estas considerações, chegamos na seguinte

**4.8 Definição:** *Um fim é dito não degenerado se  $\nu(p) \leq 1 + I(p)$ .*

**4.9 Proposição:** *Se  $p \in \bar{M} - M$  e  $g(p) = \pm \xi$ , o índice de  $X_\xi$  em  $p$  é  $(I(p) + 1 - \nu(p))$  onde  $\nu(p)$  é o número de ramificação de  $p$ .*



*Demonstração:*

Considere um valor regular  $\xi'$  de  $g$ , suficientemente próximo de  $\xi$ .  $X_{\xi'}$  terá próximo de  $p$ , uma singularidade de índice  $I(p) + 1$  em  $p$  e  $\nu(p)$  outras singularidades de índice  $-1$ .  $\square$

No caso dos fins não degenerados nós temos:

**4.10 Teorema:** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície do tipo geométrico finito com fins não degenerados. Então  $S^2 - g(M)$  contém no máximo dois elementos.*

*Demonstração:*

Seja  $\xi$  um vetor unitário fixo e  $X_\xi$  o gradiente da função altura  $h_\xi$ . Suponha que a aplicação normal de Gauss omita valores  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  e  $\xi_1 = -\xi_2$ . Calculando  $\chi(\bar{M})$  ( $\leq 0$  pelo corolário 4.6) contando-se as singularidades de  $X_{\xi_1}$ , obtemos:

$$0 \geq \chi(\bar{M}) = \sum_{p \in A_1 \cup A_2} [I(p) + 1 - \nu(p)] + \sum_{p \in A_3 \cup B} [I(p) + 1]$$

onde  $A_i$  e  $B$  são como na prova do teorema 4.5. Mas isso implica que  $A_3 \cup B = \emptyset$  o que é um absurdo. No caso onde os  $\xi_i$  não são paralelos entre si nós obtemos:

$$0 \geq \chi(\bar{M}) = \sum_{p \in A_1} [I(p) + 1 - \nu(p)] - m + \sum_{p \in A_2 \cup A_3 \cup B} [I(p) + 1]$$

Já que  $\sum_{p \in A_2} [I(p) + 1] \geq \sum_{p \in A_2} \nu(p) \geq m$ , a hipótese dos fins não serem degenerados implica que  $A_3 \cup B = \emptyset$  o que dá a contradição desejada.

Portanto a aplicação normal de Gauss não pode omitir mais do que dois pontos.  $\square$

## CAPÍTULO 5

# UMA CARACTERIZAÇÃO DOS CATENÓIDES DE DIMENSÃO PAR.

Os catenóides são as hipersuperfícies mínimas do  $\mathbb{R}^{n+1}$  obtidas por rotação de uma catenária plana e a aplicação normal de Gauss de um catenóide é um difeomorfismo sobre a esfera menos dois pontos. Existem na literatura, várias caracterizações dos catenóides. No caso de superfícies, L. Rodrigues prova em [6] o seguinte resultado:

**5.1 Teorema:** *Os catenóides são as únicas superfícies mínimas completas de curvatura total finita, mergulhadas e com curvatura estritamente negativa.*

A finalidade deste capítulo é provar um resultado similar para hipersuperfícies de dimensão par. Para este fim, utilizaremos uma caracterização devida a R. Schoen (veja [7]) que enunciaremos na seguinte forma:

**5.2 Teorema:** *Os catenóides são as únicas hipersuperfícies mínimas de tipo geométrico finito, conexas e com dois fins, ambos mergulhados.*

Usaremos também o seguinte fato de topologia que dissertaremos no Apêndice:

**5.3 Teorema:** *Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável compacta conexa e sem bordo de dimensão  $n \neq 3$ . Se  $M^n$  for  $\frac{n}{2}$ -conexo (i.e. os grupos de homotopia de  $M^n$  são nulos até a dimensão  $\frac{n}{2}$ ), então  $M^n$  é homeomorfa a esfera  $S^n$ .*

O resultado que provaremos é o seguinte:

**5.4 Teorema:** *Seja  $f : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  uma imersão do tipo geométrico finito  $n > 1$ . Suponha que as fibras críticas estejam contidas num conjunto estratificado  $N$  de dimensão menor do que  $n - 1$ . Então:*

- a)  *$M$  é topologicamente uma esfera menos dois pontos.*
- b) *Se  $M$  é mínima,  $M$  é um catenóide.*

**5.5 Observação:** *Conjunto estratificado de dimensão  $< k$  é um subconjunto de  $M$  que é reunião disjunta de um número finito de subvariedades conexas de dimensão  $< k$ .*

*Demonstração:*

*Afirmção 1:*  $S^{2n} - g(N)$  é  $n$ -conexo, i.e.  $\pi_k(S^{2n} - g(N)) = 0 \ \forall k \leq n$  onde  $\pi_k$  denota o  $k$ -ésimo grupo de homotopia.

De fato, seja  $j : (S^{2n} - g(N)) \rightarrow S^{2n}$  a inclusão. Vamos mostrar que, se  $k \leq n$ , a aplicação induzida  $j_{\#} : \pi_k(S^{2n} - g(N)) \rightarrow \pi_k(S^{2n})$  é um isomorfismo.

a)  $j_{\#}$  é sobrejetora: Trivial, pois  $\pi_k(S^{2n}) = 0$  para  $k \leq n$ .

b)  $j_{\#}$  é injetora: Usaremos um argumento de transversalidade. Seja  $\alpha : S^k \rightarrow S^{2n}$  tal que  $\alpha(S^k) \cap g(N) = \emptyset$ .  $\alpha$  é homotópica a uma função constante se e somente se  $\alpha$  se estende a uma função  $h : D^{k+1} \rightarrow S^{2n}$ , onde  $D^{k+1}$  é o disco  $(k+1)$ -dimensional. Mas  $(k+1) + \dim N < (n+1) + (n-1) = 2n$  e portanto, pelo teorema de transversalidade existe uma extensão  $\tilde{h}$  de  $\alpha$  a  $D^{k+1}$  tal que  $\tilde{h}(D^{k+1}) \cap g(N) = \emptyset$ . Mas isso significa exatamente que  $[\alpha] = 0$  em  $\pi_k(S^{2n} - g(N))$ .

*Afirmção 2:*  $\tilde{M}$  é  $n$ -conexo.

De fato, sendo  $n > 1$ ,  $S^{2n} - \bar{g}(N)$  é simplesmente conexo. Portanto  $\bar{g}|_{\tilde{M}-N} : (\tilde{M} - N) \rightarrow S^{2n} - \bar{g}(N)$  é um difeomorfismo e portanto  $\tilde{M} - N$  é  $n$ -conexo. Pelo mesmo argumento usado na prova da *Afirmção 1*, a aplicação

$\pi_k(\bar{M} - N) \rightarrow \pi_k(\bar{M})$  induzida pela inclusão é um isomorfismo se  $k \leq n$  e portanto  $\bar{M}$  é  $n$ -conexo também.

Pela afirmação 2 e o teorema 5.3,  $\bar{M}$  é homeomorfa a  $S^n$ . Em particular, por 3.1 temos:

$$2 = \chi(\bar{M}) = 2(k + \sigma)$$

e portanto  $k = 2$  e  $\sigma = -1$ , o que prova a parte a).

A parte b) segue de um teorema de R. Schoen: “Os catenóides e os pares de planos são as únicas imersões mínimas regulares no infinito com dois fins” (veja [7]). As hipersuperfícies do tipo geométrico finito são “regulares no infinito” no sentido de Schoen se os fins são mergulhados.  $\square$

Estudemos agora o caso bidimensional: Para superfícies do tipo geométrico finito em  $\mathbb{R}^3$ , as fibras críticas contém os fins, e mesmo se a curvatura for estritamente negativa, a condição sobre a dimensão das fibras críticas não é satisfeita. Apesar disso, podemos proceder de maneira similar. Antes de mais nada, observe que  $\chi(M) \leq 2$  e se os fins forem mergulhados, (3.1) implica que  $k \leq m + 1$ . Se a superfície é mergulhada, a aplicação normal de Gauss restrita aos fins cobrem no máximo 2 pontos (vide observação 2.8). Por isso, a soma dos  $\nu(p)$  nos fins é no máximo  $2m$ . Se a curvatura é negativa, não existem pontos de ramificação que não sejam os fins. Combinando esses fatos com (4.1), obtemos  $2m \leq k \leq m + 1$  o que prova o teorema.

**5.6 Teorema:** *Uma superfície mergulhada do tipo geométrico finito com curvatura estritamente negativa é topologicamente uma esfera menos dois pontos e a sua aplicação normal de Gauss estendida é um homeomorfismo na esfera. Em particular, se a superfície é mínima, ela tem que ser um catenóide.*

# APÊNDICE

Neste apêndice daremos uma idéia da demonstração do teorema 5.3 pois, apesar de bem conhecido dos especialistas, não se encontra facilmente de forma explícita na literatura. Começaremos lembrando alguns fatos de topologia algébrica. A referência básica para estes resultados é [9].

**Notação:**  $M$  denotará um espaço conexo por caminhos,  $\pi_k(M)$  o  $k$ -ésimo grupo de homotopia e  $H_k(M)$  (e  $H^k(M)$ ) o  $k$ -ésimo grupo de homologia (respectivamente cohomologia) a coeficientes inteiros.

## A.1 Dualidade

Existem vários resultados que relacionam a homologia e a cohomologia de um espaço topológico. Vamos enunciar dois destes resultados:

Seja  $G$  um grupo abeliano finitamente gerado. Pelo teorema de estrutura,  $G \cong L(G) \oplus T(G)$  onde  $L(G)$  é a parte livre,  $L(G) \cong \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$  ( $r$  vezes), e  $T(G)$  é um grupo finito, a parte de torção de  $G$ , isomorfo a  $\mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_t^{s_t}}$ ,  $p_i$  primo. Com essa notação temos:

**A.1 Teorema (coeficientes universais):** *Se  $M$  tem homologia finitamente gerada (em particular se  $M$  for compacto), então:*

$$L(H_k(M)) \cong L(H^k(M))$$

$$T(H_k(M)) \cong T(H^{k+1}(M))$$

Se  $M$  for uma variedade compacta, sem bordo e orientada, uma outra relação entre a homologia e cohomologia é fornecida pelo seguinte resultado.

**A.2 Teorema (Dualidade de Poincaré):** *Nas hipóteses acima,*

$$H_k(M) \cong H^{n-k}(M), \quad n = \dim(M)$$

## A.2 Equivalências de homotopia.

Sejam  $M, N$  espaços topológicos e  $f : M \rightarrow N$  uma função contínua. É bem conhecido da teoria básica que se  $f$  for uma equivalência de homotopia, então os homomorfismos induzidos,

$$f_* : H_k(M) \rightarrow H_k(N); \quad f_{\#} : \pi_k(M) \rightarrow \pi_k(N)$$

são isomorfismos. Um “inverso” deste fato é fornecido pelo seguinte resultado:

**A.3 Teorema (Whitehead):** *Sejam  $M, N$  variedades diferenciáveis e  $f : M \rightarrow N$  uma função contínua. Se  $M$  e  $N$  forem simplesmente conexas (i.e. 1-conexas) e os homomorfismos induzidos em homologia,*

$$f_* : H_k(M) \rightarrow H_k(N)$$

*forem isomorfismos  $\forall k$ , então  $f$  é uma equivalência de homotopia.*

**A.4 Observação:** *No teorema de Whitehead é essencial que o isomorfismo entre os grupos de homologia seja induzido por uma função contínua. Por exemplo,  $S^2 \times S^4$  e  $\mathbb{C}P^3$  tem grupos de homologia isomorfos mas  $\pi_3(S^2 \times S^4) \cong$*

$\mathbb{Z} \neq \{0\} = \pi_3(\mathbb{C}P^3)$  e portanto os dois espaços não são homotopicamente equivalentes.

**A.5 Observação:** A conclusão do teorema de Whitehead permanece válida sem a hipótese de simples conexidade se substituirmos a homologia com a homotopia, i.e. se  $f$  induzir um isomorfismo

$$f_{\#} : \pi_k(M) \rightarrow \pi_k(N); \forall k$$

**A.6 Observação:** A hipótese que  $M$  e  $N$  sejam variedades pode ser enfraquecida requerendo somente que  $M$  e  $N$  sejam CW-complexos.

## A.3 Homomorfismo de Hurewicz

Apesar de bastante diferentes em geral, os grupos de homologia e homotopia de um espaço conexo por caminhos são relacionados por um homomorfismo natural que vamos descrever agora.

Se  $N$  é uma variedade compacta, conexa e orientável (sem bordo), de dimensão  $k$ ,  $H_k(N) \cong \mathbb{Z}$  pela dualidade de Poincaré e a escolha de uma orientação em  $N$  equivale a escolha de um dos (dois) geradores de  $H_k(N)$ . Considerando  $N = S^k$ , a esfera  $k$ -dimensional e fixada uma orientação, denotamos com  $i_k$  o gerador correspondente em  $H_k(S^k)$ .

Seja  $\alpha : S^k \rightarrow M$  e  $\alpha_{*} : H_k(S^k) \rightarrow H_k(M)$  o homomorfismo induzido. O elemento  $\alpha_{*}(i_k)$  depende somente da classe de homotopia de  $\alpha$  pois funções homotópicas induzem o mesmo homomorfismo em homologia. Portanto a aplicação,

$$h_k : \pi_k(M) \rightarrow H_k(M), \quad h_k([\alpha]) = \alpha_{*}(i_k)$$

é bem definido e é, como é fácil ver, um homomorfismo de grupos chamado de homomorfismo de Hurewicz. O resultado mais significativo nesta direção é o seguinte:

#### A.7 Teorema (Hurewicz):

a)  $h_1$  é sobrejetivo e  $\text{Ker}(h_1)$  é o subgrupo  $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$  dos comutadores de  $\pi_1(M)$ . Em particular:

$$H_1(M) \cong \frac{\pi_1(M)}{[\pi_1(M), \pi_1(M)]}$$

b) Se  $\pi_i(M) = 0$ ,  $0 \leq i < k$ ,  $k \geq 2$ , então,

$$h_k : \pi_k(M) \rightarrow H_k(M)$$

é um isomorfismo.

## A.4 Conjectura de Poincaré

É bem conhecido do teorema de classificação, que uma superfície compacta (sem bordo) e simplesmente conexa é homeomorfa a esfera 2-dimensional. Poincaré conjecturou que o mesmo valia em 3 dimensões e chegou a fornecer algumas provas (incompletas). O problema porém é em aberto até hoje.

Claramente para as dimensões maiores, a simples conexão não é uma condição suficiente (p.ex.  $S^2 \times S^2$ ). No início dos anos 60, S. Smale propôs que a condição  $n$ -dimensional correspondente seria a equivalência homotópica (que é equivalente a simples conexão no caso 2 e 3 dimensional como veremos na demonstração do teorema 5.3 a seguir). De fato, ele conseguiu provar o seguinte teorema:



**A.8 Teorema (Smale):** Se  $M^n$  é uma variedade diferenciável compacta homotopicamente equivalente a  $S^n$ ,  $n \geq 5$ , então  $M^n$  é homeomorfa a  $S^n$ . No início dos anos 80, Friedman provou o teorema acima para  $n = 4$ , mas o caso  $n = 3$  permanece, como observado acima, em aberto.

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema.

**A.9 Teorema:** Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ , compacta e sem bordo. Se  $\pi_k(M^n) = 0 \ \forall k \leq n/2$ , então  $M^n$  é homotopicamente equivalente a  $S^n$  e portanto, se  $n \neq 3$ , homeomorfa a  $S^n$  por A.8.

*Demonstração:*

Pelo teorema de Hurewicz,  $H_k(M^n) = 0$  se  $0 < k \leq n/2$  e pela dualidade de Poincaré  $H^j(M^n) = 0$  se  $n > j \geq n/2$ . Combinando estes fatos com o teorema A.1, temos que  $H_l(M^n) = 0 \ 0 < l < n$  e obviamente  $H_0(M^n) \cong \mathbb{Z} \cong H_n(M^n)$ .

Em particular, o homomorfismo de Hurewicz

$$h_n : \pi_n(M^n) \rightarrow H_n(M^n)$$

é um isomorfismo. Seja  $\alpha : S^n \rightarrow M^n$  uma função contínua tal que  $h_n([\alpha])$  gera  $H_n(M^n)$ . Em particular,  $\alpha_*(i_n) := h_n([\alpha])$  gera  $H_n(M^n)$  e portanto

$$\alpha_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(M^n)$$

é um isomorfismo. Mas  $H_k(M^n) = 0 = H_k(S^n)$  se  $0 < k < n$  e portanto

$$\alpha_* : H_k(S^n) \rightarrow H_k(M^n)$$

é um isomorfismo se  $0 < k \leq n$ . Finalmente toda função contínua  $f : X \rightarrow Y$  entre espaços topológicos conexos por caminhos induz um isomorfismo entre as homologias 0-dimensionais e portanto também

$$\alpha_* : H_0(S^n) \rightarrow H_0(M^n)$$

é isomorfismo. A conclusão então segue-se do teorema A.3.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] M. P. Carmo: Geometria riemanniana, 2ª edição (Projeto Euclides), IMPA-Rio de Janeiro, 1988.
- [2] J. L. M. Barbosa, G. Collares: Minimal Surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1986.
- [3] R. Osserman: A survey on minimal surfaces, Van Nostrand, 1969.
- [4] P. Hartman: Ordinary differential equations, 2<sup>nd</sup> edition, Birkhäuser, 1982.
- [5] L. Jorge, W. Meeks III: The topology of complete minimal surfaces of finite total gaussian curvature, *Topology*, vol. 22, (1983), 203-221.
- [6] L. Rodrigues: A note on minimal surfaces of finite total curvature, *An. Acad. Brasileira de Ciências*, vol. 53 (3), 1981, 423-426,
- [7] R. Schoen: Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces, *Journal of Diff. Geometry*, vol. 18 (1), 1983, 791-809.
- [8] V. Guillermin, A. Pollack: Differential Topology, MIT, Prentice-Hall, 1974.
- [9] E. H. Spanier: Algebraic Topology, Springer, New York, 1966.